

Exercices AVEC SOLUTIONS

Espaces vectoriels

Exercice1 : Justifier si les objets suivants sont des espaces vectoriels sur \mathbb{R}

(a) L'ensemble des fonctions réelles sur $[0, 1]$, continues, positives ou nulles, pour l'addition et le produit par un réel.

(b) L'ensemble des fonctions réelles sur \mathbb{R} vérifiant

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ pour les mêmes opérations.}$$

(c) L'ensemble des fonctions sur \mathbb{R} telles que : $f(3) = 7$.

Exercice2 : dans l'espace vectoriel $(V_2; +; \cdot)$

déterminer le scalaire α et le vecteur \vec{u} tel que :

$$(3\alpha^2 - 5\alpha + 2)\vec{u} = \vec{0}$$

Solutions : on utilisant les Règles de calculs dans un espace vectoriel on a donc :

$$(3\alpha^2 - 5\alpha + 2)\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } 3\alpha^2 - 5\alpha + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \alpha = \frac{2}{3} \text{ ou } \alpha = 1$$

Donc l'ensembles des solutions est :

$$S = \left\{ \left\{ 1; \frac{2}{3} \right\} \times V_2 \cup (\mathbb{R} \times \{\vec{0}\}) \right\}$$

Exercice3: on considère l'ensemble :

$$F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x\}$$

Montrer que F est un sous -espace vectoriel de

l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$

Solution : a) on a $F \subset \mathbb{R}^2$

b) Et on a : $(0; 0) \in F$ car : $0 = 2 \times 0$ donc : $F \neq \emptyset$

c) soient $(x; y)$ et $(x'; y')$ sont deux éléments de F

donc : $y = 2x$ et $y' = 2x'$

et $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$ montrons que : $\lambda(x; y) + \mu(x'; y') \in F$?

$$\lambda(x; y) + \mu(x'; y') = (\lambda x; \lambda y) + (\mu x'; \mu y')$$

$$\lambda(x; y) + \mu(x'; y') = (\lambda x + \mu x'; \lambda y + \mu y')$$

$$\lambda y + \mu y' = \lambda 2x + \mu 2x' = 2(\lambda x + \mu x')$$

Donc : $\lambda(x; y) + \mu(x'; y') \in F$

Donc : F est un sous -espace vectoriel de

l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$

Exercice4 : on considère l'ensemble :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} / (a; b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Montrer que $(F; +; \cdot)$ est un espace vectoriel

sur \mathbb{R}

Solution : on sait que $(M_2(\mathbb{R}); +; \cdot)$ est un

espace vectoriel sur \mathbb{R}

Il suffit de montrer que : F est un sous -espace

vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}); +; \cdot)$

a) on a : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 & 0 \\ -0 & 0-0 \end{pmatrix} \in F$ donc : $F \neq \emptyset$

c) soient $M_1 = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1-b_1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} a_2+b_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2-b_2 \end{pmatrix}$

deux éléments de F et $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ montrons que :

$$\alpha M_1 + \beta M_2 \in F ?$$

$$\alpha M_1 + \beta M_2 = \alpha \begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1-b_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a_2+b_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2-b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \alpha(a_1+b_1) & \alpha b_1 \\ -\alpha b_1 & \alpha(a_1-b_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta(a_2+b_2) & \beta b_2 \\ -\beta b_2 & \beta(a_2-b_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(a_1+b_1)+\beta(a_2+b_2) & \alpha b_1+\beta b_2 \\ -(\alpha b_1+\beta b_2) & \alpha(a_1-b_1)+\beta(a_2-b_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\alpha a_1+\beta a_2)+(\alpha b_1+\beta b_2) & \alpha b_1+\beta b_2 \\ -(\alpha b_1+\beta b_2) & (\alpha a_1+\beta a_2)-(\alpha b_1+\beta b_2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On pose : $d = \alpha b_1 + \beta b_2$ et $c = \alpha a_1 + \beta a_2$

$$\text{Donc : } \alpha M_1 + \beta M_1 = \begin{pmatrix} c+d & d \\ -d & c-d \end{pmatrix} \in F$$

Donc : $(F; +; \cdot)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R}

Exercice5 : on considère l'ensemble :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & 3a \end{pmatrix} / (a;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Montrer que $(F; +; \cdot)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R}

Solution : on sait que $(M_2(\mathbb{R}); +; \cdot)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R}

Il suffit de montrer que : F est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}); +; \cdot)$

$$\text{a) on a : } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \times 0 \\ 0 & 3 \times 0 \end{pmatrix} \in F \text{ donc : } F \neq \emptyset$$

$$\text{c) soient } M_1 = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & 3a \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} c & -2d \\ d & 3c \end{pmatrix}$$

deux éléments de F et $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ montrons que :

$$\alpha M_1 + \beta M_2 \in F ?$$

$$\alpha M_1 + \beta M_2 = \alpha \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & 3a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c & -2d \\ d & 3c \end{pmatrix}$$

$$\alpha M_1 + \beta M_2 = \begin{pmatrix} \alpha a & -2\alpha b \\ \alpha b & 3\alpha a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta c & -2\beta d \\ \beta d & 3\beta c \end{pmatrix}$$

$$\alpha M_1 + \beta M_2 = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & -2(\alpha b + \beta d) \\ \alpha b + \beta d & 3(\alpha a + \beta c) \end{pmatrix}$$

On pose : $f = \alpha b + \beta d$ et $e = \alpha a + \beta c$

$$\text{Donc : } \alpha M_1 + \beta M_2 = \begin{pmatrix} e & -2f \\ f & 3e \end{pmatrix} \in F$$

Donc : $(F; +; \cdot)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R}

Exercice6 : dans espace vectoriel réel $(M_2(\mathbb{R}); +; \cdot)$

on considère les matrices :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

est-ce que la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \text{ est une combinaison linéaire des}$$

matrices : M_1 et M_2 ?

Solution : on cherche $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel

que : $M = \alpha M_1 + \beta M_2$?

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ 0 & 4\beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \alpha + \beta \\ \alpha & 4\beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 2 \\ \alpha + \beta = 5 \\ 4\beta = 8 \end{cases}$$

On a donc : $M = 3M_1 + 2M_2$

donc : M est une combinaison linéaire des matrices : M_1 et M_2

Exercice7 : dans : $(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$ on considère les

Vecteurs : $\vec{x}_1 = (1; -2)$ et $\vec{x}_2 = (5; 1)$ et $\vec{x}_3 = (-7; 2)$

Est-ce que le vecteur : \vec{x}_3 est une combinaison

linéaire des vecteurs : \vec{x}_1 et \vec{x}_2 ?

Solution : on cherche $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel

que : $\vec{x}_3 = \alpha \vec{x}_1 + \beta \vec{x}_2$?

$$\vec{x}_3 = \alpha \vec{x}_1 + \beta \vec{x}_2 \Leftrightarrow (-7; 2) = \alpha(1; -2) + \beta(5; 1)$$

$$\Leftrightarrow (-7; 2) = (\alpha; -2\alpha) + (5\beta; \beta)$$

$$\Leftrightarrow (-7; 2) = (\alpha + 5\beta; -2\alpha + \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 5\beta = -7 \\ -2\alpha + \beta = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 10\beta = -14 \\ -2\alpha + \beta = 2 \end{cases} \Rightarrow 11\beta = -12 \Rightarrow \beta = -\frac{12}{11} \text{ et } \alpha = \frac{-17}{11}$$

On a donc : $\vec{x}_3 = \frac{5}{11} \vec{x}_1 - \frac{17}{11} \vec{x}_2$

donc : \vec{x}_3 est une combinaison linéaire des

vecteurs : \vec{x}_1 et \vec{x}_2

b) Dans le l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^3; +; \cdot)$

$(3, 3, 1)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(1, 1, 1)$ car on a l'égalité $(3, 3, 1) = 2(1, 1, 0) + 1(1, 1, 1)$.

c) dans : $(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$: le vecteur $\vec{x} = (2, 1)$ n'est pas colinéaire au vecteur $\vec{y} = (1, 1)$ car s'il l'était, il

existerait un réel λ tel que $\vec{x} = \lambda \vec{y}$

ce qui équivaudrait à l'égalité $(2, 1) = (\lambda, \lambda)$. faux

Exercice8 : dans $(\mathbb{R}_n[X]; +; \cdot)$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieure a 2 on considère les polynômes : $P_1(x) = x^2 - x$;

$$P_2(x) = 1 + x^2 + x \text{ et } P_3(x) = 8 - x^2$$

Est-ce que le polynôme : $P(x) = -2x^2 - 2x + 15$ est une combinaison linéaire des polynômes :

$P_1(x)$ et $P_2(x)$ et $P_3(x)$?

Solution : on peut remarquer que :

$$P(x) = 1 \times P_1(x) - 1 \times P_2(x) + 2 \times P_3(x)$$

donc : le polynôme : $P(x)$ est une combinaison linéaire des polynômes $P_1(x)$ et $P_2(x)$ et $P_3(x)$

Exercice9: Soit $E = F(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des

fonctions réelles. Soient f_0, f_1, f_2 et f_3 les fonctions définies par : $\forall x \in \mathbb{R} f_0(x) = 1, f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3$. Alors la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$

Montrer que f est combinaison linéaire des fonctions f_0, f_1, f_2, f_3

Solution : puisque l'on a l'égalité :

$$f = f_3 - 2f_2 - 7f_1 - 4f_0$$

alors f est combinaison linéaire des fonctions : f_0, f_1, f_2, f_3

Exercice10: dans espace vectoriel réel

$(M_2(\mathbb{R}); +; \cdot)$ On considère la famille :

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ et on considère la}$$

$$\text{matrice : } M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$$

Montrer que la matrice M est engendré par la famille B

Solution : on cherche $(a; b; c) \in \mathbb{R}^2$ tel :

$$M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a donc : } \begin{pmatrix} a+2b & b+c \\ 2c & -a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc : } M = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

donc : M est engendré par la famille B

Exercice11: dans l'espace vectoriel réel

$(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$ on considère les vecteurs :

$$\vec{x}_1 = (3; 2) \text{ et } \vec{x}_2 = (1; 5) \text{ et la famille } B = (\vec{x}_1; \vec{x}_2)$$

Montrer que la famille $B = (\vec{x}_1; \vec{x}_2)$ engendre

l'espace vectoriel réel \mathbb{R}^2

Solution : Montrons que $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$

$\exists (\alpha_1; \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ Tel que : $\vec{x} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2$

On pose : $\vec{x} = (a; b)$

$\vec{x} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 \Leftrightarrow (a; b) = \alpha_1 (3; 2) + \alpha_2 (1; 5)$

$\Leftrightarrow (a; b) = (3\alpha_1; 2\alpha_1) + (\alpha_2; 5\alpha_2)$

$\Leftrightarrow (a; b) = (3\alpha_1 + \alpha_2; 2\alpha_1 + 5\alpha_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3\alpha_1 + \alpha_2 \\ b = 2\alpha_1 + 5\alpha_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{13}(5a - b) \\ \alpha_2 = \frac{1}{13}(-2a + 3b) \end{cases}$$

donc : famille $B = (\vec{x}_1; \vec{x}_2)$ engendre l'espace

vectorel réel \mathbb{R}^2

Exercice12: On munit \mathbb{R}^3 des opérations usuelles.

Soient $F_1 = \{(\lambda, \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$,

$F_2 = \{(\lambda - 3\mu, 2\mu, \lambda + \mu), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$

$F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$ et

$F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 0 \text{ et } 2x + 5y + z = 0\}$

Montrer que F_1, F_2, F_3 et F_4 sont des sous-espaces de \mathbb{R}^3 et en fournir dans chaque cas une famille génératrice.

Solution.

• $F_1 = \{(\lambda, \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda(1, 1, 1), \lambda \in \mathbb{R}\} =$

$\text{Vect}(\vec{x}_1)$ où $\vec{x}_1 = (1, 1, 1)$. F_1 est donc un sous-

espace vectoriel de \mathbb{R}^3 et une

famille génératrice de F_1 est (\vec{x}_1) .

• $F_2 = \{(\lambda - 3\mu, 2\mu, \lambda + \mu), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$

$= \{\lambda(1, 0, 1) + \mu(-3, 2, 1), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$

$= \text{Vect}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ où $\vec{x}_1 = (1, 0, 1)$ et $\vec{x}_2 = (-3, 2, 1)$.

F_2 est donc un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3

et une famille génératrice de F_2 est (\vec{x}_1, \vec{x}_2)

• Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$x - y + z = 0 \Leftrightarrow z = -x + y$.

Donc, $F_3 = \{(x, y, -x + y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

$= \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, 1), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

$= \text{Vect}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ où $\vec{x}_1 = (1, 0, -1)$ et $\vec{x}_2 = (0, 1, 1)$.

F_3 est donc un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3

et une famille génératrice de F_3 est (\vec{x}_1, \vec{x}_2) .

• Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$x + 2y + 3z = 0$ et $2x + 5y + z = 0$

$\Leftrightarrow x = -2y - 3z$ et $2(-2y - 3z) + 5y + z = 0$

$\Leftrightarrow y = 5z$ et $x = -13z$.

Donc, $F_4 = \{(-13z, 5z, z), z \in \mathbb{R}\}$

$= \{z(-13, 5, 1), z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(\vec{x})$ où

$\vec{x} = (-13, 5, 1)$. F_4 est donc un sous-espace

vectorel de \mathbb{R}^3 et une famille génératrice de

F_4 est (\vec{x}) .

Exercice13: dans l'espace vectoriel réel

$(\mathbb{R}^3; +; \cdot)$ on considère la famille :

$B = (\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ tel que : $\vec{u} = (\cos a; \cos b; \cos c)$

$\vec{v} = (\sin a; \sin b; \sin c)$ et

$\vec{w} = (\sin(x+a); \sin(x+b); \sin(x+c))$

Avec ; $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$

Montrer que la famille B est liée

Solution.

On a : $\sin(x+a) = \sin x \cos a + \cos x \sin a$

$\sin(x+b) = \sin x \cos b + \cos x \sin b$

$\sin(x+c) = \sin x \cos c + \cos x \sin c$

Donc :

$\vec{w} = \sin x (\cos a; \cos b; \cos c) + \cos x (\sin a; \sin b; \sin c)$

Donc : $\vec{w} = \sin x \vec{u} + \cos x \vec{v}$ et puisque :

$(\sin x; \cos x) \neq (0; 0)$ alors la famille B est liée

Exercice14: On munit \mathbb{R}^3 des opérations usuelles.

Soit : $E = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 3z = 0\}$

Montrons que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel

Et donner une famille génératrice de E et une base de E

Solutions : Il suffit de montrer que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3

a) $E \neq \emptyset$ car : $(0; 0; 0) \in E$ en effet : $0 - 0 + 3 \times 0 = 0$

b) soient : $\vec{u} = (a; b; c) \in E$ et $\vec{v} = (x; y; z) \in E$

et $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = (\alpha a; \alpha b; \alpha c) + (\beta x; \beta y; \beta z)$$

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = (\alpha a + \beta x; \alpha b + \beta y; \alpha c + \beta z)$$

$$(\alpha a + \beta x) - (\alpha b + \beta y) + 3(\alpha c + \beta z) =$$

$$= (\alpha a - \alpha b + 3\alpha c) + (\beta x - \beta y + 3\beta z)$$

$$\vec{u} = (a; b; c) \in E \Leftrightarrow a - b + 3c = 0$$

$$\text{Donc : } \alpha a - \alpha b + 3\alpha c = 0$$

$$\text{De même : } \vec{v} = (x; y; z) \in E \Leftrightarrow x - y + 3z = 0$$

$$\text{Donc : } \beta x - \beta y + 3\beta z = 0$$

$$\text{Donc : } (\alpha a + \beta x) - (\alpha b + \beta y) + 3(\alpha c + \beta z) = 0$$

$$\text{Donc : } \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in E$$

Donc : E est un \mathbb{R} -espace vectoriel

$$2) (x; y; z) \in E \Leftrightarrow x - y + 3z = 0$$

$$\text{Soit : } \vec{u} = (a; b; c) \in E \Leftrightarrow a - b + 3c = 0 \Leftrightarrow a + 3c = b$$

$$\vec{u} = (a; b; c) = (a; a + 3c; c) = a(1; 1; 0) + c(0; 3; 1)$$

Donc :

$$\vec{u} = (a; b; c) = (a; a + 3c; c) = a(1; 1; 0) + c(0; 3; 1)$$

$$\text{On pose : } \vec{e}_1 = (1; 1; 0) \text{ et } \vec{e}_2 = (0; 1; 0) \text{ et } \vec{e}_3 = (0; 3; 1)$$

$$\text{On a donc : } \vec{u} = a\vec{e}_1 + c\vec{e}_2$$

$$\text{Donc : } B = (\vec{e}_1; \vec{e}_2) \text{ est une famille génératrice de E}$$

Montrons que $B = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est une famille libre ?

Soient : $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ Tel que

$$\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha; \alpha + 3\beta; \beta) = (0; 0; 0)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \alpha + 3\beta = 0 \text{ ou } \beta = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \beta = 0$$

Donc : $B = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est une famille libre

Donc : $B = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est une base de E

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs
et exercices Que l'on devient un mathématicien

